



MATEMÁTICAS CCSS CONVOCATORIA JULIO 2023

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es de 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

Solución:

Formato S: x

Formato L: y

Formamos las restricciones con los datos que nos proporciona el problema.

$$x + y \leq 70$$

$$y \geq \frac{x+y}{5}$$

$$y \leq 40$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Representamos el recinto solución:

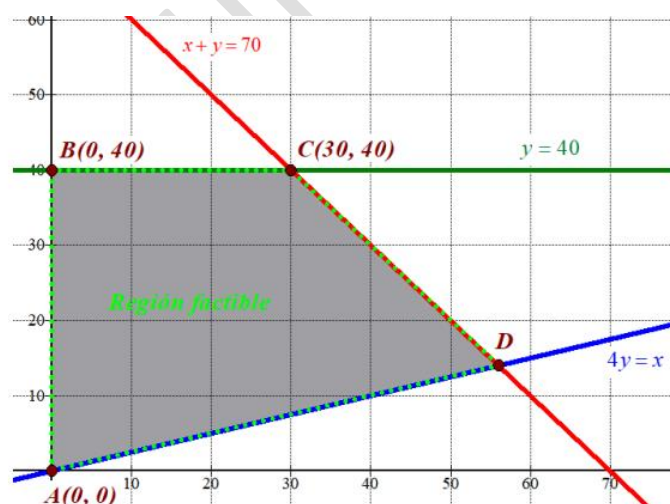
$$x + y = 70 \Rightarrow y = 70 - x$$

$$4y - x = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{4}$$

$$y = 40 \quad x = 0 \quad y = 0$$

x	y
0	70
70	0

x	y
0	0
20	5



Obtenemos los vértices del recinto solución:

A(0,0), B(0,40), C(30,40) D(56,14)



Sustituimos cada vértice en la función beneficio:

$$B(x, y) = 3000x + 2500y$$

$$B(0,0) = 0$$

$$B(0,40) = 100000$$

$$B(30,40) = 190000$$

$$B(56,14) = 203000$$

El máximo beneficio se obtiene repartiendo **56 unidades del formato S y 14 unidades del formato L.**

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a:
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a.
- Resolver el sistema para a=-1.

Solución:

- Formamos la matriz y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el det A y lo igualamos a 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 1 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Con este valor de a discutimos el sistema.

- $a \neq 1$

$|A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A^* = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas}$
estamos ante un **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**

- $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango A:

$|A| = 0$, buscamos un menor de orden inferior distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

Rango A*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (2 columnas iguales)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A^* = 3$$

$\text{Rango } A \neq \text{Rango } A^*$
estamos ante un **SISTEMA INCOMPATIBLE**

- Resolver para a=-1.

En este caso estamos ante un sistema compatible determinado que resolveremos por el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{F_3 + F_2} \left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0, y = 1, z = 1$



P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

Siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

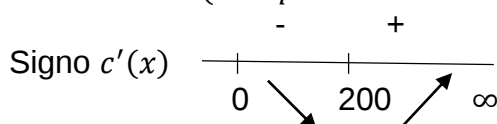
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables de esa factoría.
- Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

Solución:

- Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizamos la primera derivada.

$$c'(x) = 2 - \frac{80000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 40000 \Rightarrow$$

$$x = 200 \text{ (nos quedamos solo con el valor positivo porque } x > 0 \text{)}$$



Crece en $(0, 200)$ y decrece en $(200, \infty)$

- Con el estudio anterior comprobamos que en $x=200$ tenemos un mínimo. Para obtener el coste mínimo:

$$c(200) = 2 \cdot 200 + 720 + \frac{80000}{200} = \mathbf{1520 \text{ miles de euros}}$$

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
- Determinar el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1, 10]$, dibujando el recinto correspondiente.

Solución:

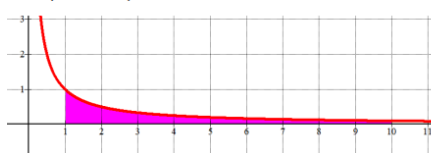
- $\text{Dom} = \mathbb{R}$. El posible punto de discontinuidad estará en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x - 1 = -1; \quad f(0) = -1$$

Como los tres valores no son iguales, la función no será continua en $x=0$.

- Para el cálculo del área realizaremos la integral definida. Primeramente representamos la función, que en este caso será $\frac{1}{x}$.

$$\text{Área} = \int_1^{10} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{10} = \ln 10 - \ln 1 = \mathbf{2,3 \text{ u}^2}$$





P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

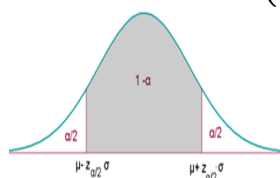
- Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.
- ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza de 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de la μ ?

Solución:

a) $\left(\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Con un nivel de confianza del 99% tenemos:

$$p(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$



b)

El intervalo de confianza para el 99% será:

$$\left(1248 - 2,575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}}, 1248 + 2,575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}} \right) \\ = (1163,54, 1332,46)$$

Con un nivel de confianza del 95% tenemos:

$$p(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 127 = 1,96 \cdot \frac{328}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 25,62 \sim 26 \text{ tiendas}$$

P6.(Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0,97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0,90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0,04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

- Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.
- Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

Solución:

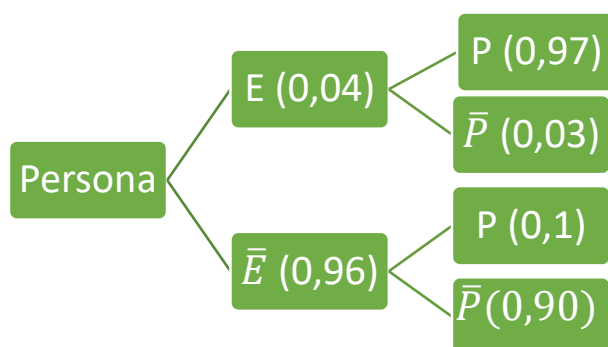
Primero definiremos los sucesos:

E : persona enferma

$\bar{E}$: persona no enferma

P : test positivo

$\bar{P}$: test negativo



- a) Para calcular la probabilidad de que una persona obtenga resultado positivo, aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(P) = P(E \cap P) + P(\bar{E} \cap P) = P(E) \cdot P(P/E) + P(\bar{E}) \cdot P(P/\bar{E})$$

$$= 0,04 \cdot 0,97 + 0,96 \cdot 0,1 = \mathbf{0,1348}$$

- b) Aplicaremos el teorema de Bayes.

$$P(E/P) = \frac{P(E \cap P)}{P(P)} = \frac{P(E) \cdot P(P/E)}{P(P)} = \frac{0,04 \cdot 0,97}{0,1348} = \mathbf{0,2878}$$

C1. (Números y álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores de a, b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 - 4a & b - 16 & 0 & c - 32 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para que } \text{rango} A = 1 \Rightarrow \begin{cases} -2 - 4a = 0 \\ b - 16 = 0 \\ c - 32 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{-1}{2} \\ b = 16 \\ c = 32 \end{matrix}$$

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

Solución:

El dominio serán los valores que cumplan $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Por tanto **Dom** = $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

C3 (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0,7 y 0,4 desde el situado en la localidad B, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

Solución:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Como los sucesos son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = 0,7 + 0,4 - 0,7 \cdot 0,4 = \mathbf{0,82}$$